Cuaderno de Materiales
Nº23, 2011, 575-600
ISSN:1139-4382

La Teoría de las Paralelas de André Tacquet. Entre Clavius y Saccheri

Ferran Mir Sabaté

... one cannot study the history of mathematics in the sixteenth and seventeenth centuries without coming across Jesuits at every corner.

George Sarton 1949

1. Introducción

El origen de este trabajo se encuentra en un curso de Historia del Triángulo seguido en la Univeridad Autónoma de Barcelona bajo la dirección de los profesores Agustí Reventós y Carlos Julio Rodríguez. En dicho curso, se discutió la posibilidad de que existiese alguna influencia de la obra de Saccheri[1] sobre la obra de Lambert[2]. Como es bien conocido, ambos autores discuten las propiedades que han de tener los ángulos de un cuadrilátero, pero Lambert nunca cita a Saccheri. También sabemos que la obra de Saccheri tuvo muy escasa difusión en su época[3]: la muerte de su autor el mismo año de su publicación puede ser una de sus explicaciones. La conclusión provisional fue que, en caso de que existiese dicha influencia, sólo podría darse de forma indirecta a través de la tesis doctoral de Kluegel (1763)[4], tesis que nunca ha sido traducida de su latín original, a pesar de ser citada por los autores clásicos de la historia de la geometría no euclidiana como Bonola[5] o Rosenfeld[6].

La primera tarea, consistía pues, en la traducción del trabajo de Kluegel. Dicho trabajo consiste en un examen riguroso de los intentos de demostración del 5º postulado euclídeo que se habían realizado hasta la fecha[7]. Kluegel dedica mayor atención precisamente a Saccheri, sobre quien escribe dos capítulos enteros[8]. En ellos, centra su análisis en la proposición 23[9] de Saccheri, en la que éste discute la posibilidad de existencia de dos rectas asintóticas (sin

1 [Saccheri 1733]

2 [Lambert 1786]. Este texto fue escrito en 1766 aunque no se pùblicó hasta 1786 cuando su autor ya había fallecido. También se ha reeditado ex novo en [Engel-Stackel pp. 137-207]. Para un exámen de la obra de Lambert ver [Basso 1999 pp. 114 y ss. y 248]. También debo agradecer a Carlos Julio Rodríguez que me haya permitido ver sus escritos en prensa sobre Lambert.

3 Al menos, los historiadores de las matemáticas de la época no se hacen eco de esta obra: [Montucla 1798] ni siquiera lo cita y [Heilbronner 1742] tan sólo lo relaciona dentro de una lista de libros de geometría elemental.

4 [Kluegel 1763]

5 Bonola 1955

6 Rozenfeld 1988

7 La traducción de la tesis ha sido realizada por la profesora titular de Filologia Latina de la UB, Esperança Borrell i Vidal y se encuentra pendiente de publicación.

8 Ningún otro autor merece para Kluegel más de un capítulo y muchos de ellos son tratados conjuntamente en un solo capítulo.

9 Ver [Dou 1992].

llamarlas con este nombre)[10]. Ello podía dar pie a confirmar nuestra hipótesis de influencia indirecta de Saccheri sobre Lambert, ya que sabemos que Lambert conoció a finales de los 50's a Abraham Kaestner[11] (director de la tesis de Kluegel) y solicitó infructuosamente una plaza de profesor en la Universidad de Goettingen donde estudiaba el propio Kluegel.

No obstante, la traducción de la tesis de Kluegel abrió otras perspectivas investigadoras: ¿quiénes eran y qué habían dicho exactamente los 24 autores estudiados por Kluegel? Al margen de matemáticos reconocidos (como Wallis, Saccheri, Nasir al-Din al-Tusí, Clavius o Kaestner) Kluegel estudia la obra de un nutrido grupo de matemáticos, físicos o filósofos menos conocidos, siempre en torno al tema de las paralelas[12]. Entre ellos, existe una nutrida representación de autores jesuítas: Clavius, Tacquet, Pardies y Boscovich. Ello nos ha conducido al estudio de la relación de la enseñanza jesuíta con el desarrollo de las matemáticas y, más concretamente, con la evolución de la teoría de las paralelas durante los siglos XVI y XVII. El campo investigador de la influencia de los jesuítas en el desarrollo de las matemáticas ha recibido, en los últimos años, un buen número de trabajos[13]. Pero no existe ninguno dedicado específicamente a la obra de André Tacquet, a pesar de que la amplia difusión de su obra durante los siglos XVII y XVIII es citada por numerosos autores.

Por ello, hemos centrado nuestro trabajo en la obra de André Tacquet como puente intermedio entre Clavius y Saccheri en la teoria de las paralelas. En los próximos capítulos trataremos los siguientes temas: en el capítulo 2) mostraremos las líneas generales de la enseñanza jesuítica de la época y del papel de las matemáticas en su diseño curricular, en el capítulo 3) veremos como el texto de Euclides se erige en texto central para la geometría y cómo es editado por Clavius y Tacquet respectivamente, en el capítulo 4) centraremos nuestra atención en el problema de las paralelas en ambos textos, para finalizar en el capítulo 5) con la idea nueva de Saccheri.

10 Se trata del conocido cuadrilátero se Saccheri bajo la hipótesis del ángulo agudo.

11 Está documentada la correspondencia entre Kaestner y Lambert en el periodo 1757-1775 (salvo la interrupción 1761-1764 por motivos bélicos). Ver [Basso 1999 pp. 237-240].

12 Entre ellos existen algunos de los que carecemos, todavía hoy, de noticia alguna como Friedrich Gottlob Hanke o Friedrich Daniel Behn (aunque sus tesis doctorales de 1751 y 1761, respectivamente, todavía se encuentra en la biblioteca de la Universidad de Goettingen).

13 Quizá los puntos de partida de este interés sean: a) el libro de Wallace [Wallace 1984] en el que se analiza la influencia jesuítica en Galileo y b) el extenso artículo de Crombie y Carugo en el que se estudian los escritos de juventud (Juvenilia) de Galileo [Carugo-Crombie 1983], concluyendo que la fuente de los mismos fueron tres profesores del Collegio Romano (Pereira, Toledo y Clavius). Después de estas obras seminales, se han publicado tanto textos de carácter general sobre la ciencia jesuítica ([Dear 1987], [MacDonnell 1989], [Wallace 1991], [Mancosu 1992], [Baldini 1992], [Dear 1995], [Mancosu 1996], [Julia 1996], [Romano 1999], [Udias 2000], [Brizzi 2001], [Smolarski 2002], [Smolarski 2002-1], [Feingold 2003], [Romano 2004]), como textos centrados en el estudio de personajes o instituciones jesuítas concretos ([Wilks 1990, sobre Clavius], [Dhombres 1993, sobre St. Vincent], [Giard 1993, sobre el Collegio Romano], [Meskens 1994, sobre St. Vincent], [Kessler 1995, sobre Clavius], [Knobloch 1998, sobre Clavius], [Blum 2006, sobre Pereira], [Gatto 2006, sobre Clavius]).

Antes de finalizar esta introducción, debo agradecer la atención prestada a este trabajo por los profesores de la Universidad de Barcelona Josep Pla i Carrera, sin cuya guía y conocimiento histórico de las matemáticas no habría sido posible este trabajo, y Esperança Borrell i Vidal, cuya dedicación y conocimiento del latín han hecho posible establecer una traducción de la tesis de Kluegel. En este aspecto, también he recibido un notable apoyo de Carolina Altolaguirre, quien ha traducido extensas partes de la obra de Tacquet. También debo agradecer a Agustí Reventós y Carlos Julio Rodríguez algunas insinuaciones y comentarios que, sin duda, han ayudado a la materialización de mis propias ideas. No obstante, todos los errores o malas interpretaciones que puedan existir, son responsabilidad exclusivamente mía.

2. Jesuítas: la Contra Reforma matemática

La influencia de la Compañía de Jesús en el renacimiento de los estudios de matemáticas durante los siglos XVI y XVII es innegable. Desde sus primeros inicios, compañeros de Ignacio de Loyola como Jerónimo Nadal (1507-1580) o Baltasar Torres (?-1563)[14] plantearon la necesidad de las matemáticas como ciencia soporte de la filosofía natural. Para los jesuítas, el empirismo aristotélico necesitaba una base racional que era proporcionada por las matemáticas. Por eso participaron activamente en el debate sobre la quæstio de certitudine mathematicarum[15]. Este debate, iniciado con las obras de Piccolomini (1547) y Barozzi[16] (1560), se desarrolló durante la segunda mitad del siglo XVI y todo el XVII. Los temas que se hallaban en cuestión eran básicamente dos:

- ¿Puede considerarse que las matemáticas cumplen la definición aristotélica de ciencia?
- ¿Sobre qué base puede justificarse la certeza de las matemáticas, si no es por su estructura lógica?.

Conviene señalar que tampoco existió unidad de criterios en esta polémica entre los propios profesores del Collegio Romano: así, la postura de Cristophorus Clavius será

14 Ambos personajes han sido estudiados por Antonella Romano [Romano 1999, pp. 71-83]. Sobre la influencia del matemático Francesco Maurolico sobre el colegio jesuíta de Messina y sobre Jerónimo Nadal pueden verse también [Scaduto 1948] y [Scaduto 1949].

15 Un desarrollo breve del tema puede encontrarse en [Mancosu 1996, pp. 10-33]. Para un detalle más amplio ver [DePace 1993], libro dedicado en su totalidad al tema. Giacobbe ha dedicado una serie de artículos [Giacobbe 1972-1], [Giacobbe 1972-2], [Giacobbe 1973], [Giacobbe 1976] y [Giacobbe 1977] a cada uno de los autores destacados en la polémica (Piccolomini, Barozzi, Catena, Biancani y Pereyra, respectivamente).

16 Francesco Barozzi (1537-1604) fue profesor en la Universidad de Padua, uno de los focos del platonismo renacentista. En 1560 publicó un opúsculo sobre el tema. Ver [Giacobbe 1972-2] para un análisis de su contenido.

radicalmente distinta de la de Benito Pereyra (1535-1610)[17], profesor de Filosofía Natural, quien defendía el carácter aristotélicamente no científico de las matemáticas.

Pero quizá la aportación más original de la Compañía estuvo en el campo de la enseñanza. Durante los siglos anteriores, los centros de cultura se habían ido trasladando desde los monasterios a las ciudades, pero las universidades seguían, en buena parte, ancladas en los programas de estudio medievales (trivium yquadrivium)[18]. La joven orden religiosa, mediante la creación de colegios[19], urbanos casi en su totalidad, tendrá una influencia decisiva en los cambios pedagógicos de la época, en general, y en el cambio en la enseñanza de las matemáticas, en particular.

En este último aspecto, el Collegio Romano[20], fundado en 1551, desempeñó un papel trascendental. En 1553 suceden dos hechos independientes pero significativos: el envío a Ignacio por parte del rector del Collegio Romano, Martín de Olave, de un primer borrador de plan de estudios y el nombramiento del primer profesor de matemáticas del colegio: Baltasar Torres, quien permanecerá en dicho puesto hasta su muerte en 1563. En los años anteriores, Jerónimo Nadal, desde el Colegio de Messina, ya había impreso un programa de estudio de las matemáticas en el que las dividía en cuatro partes: geometría, aritmética, astrolabio y astronomía[21] con cuatro autores de referencia para cada una de ellas: Euclides, Oronce Finé, Johannes Stoefler y Georg Peurbach, respectivamente.

17 Benito Pereyra (1535-1610) fue profesor de Filosofía Natural (Física) durante los cursos de 1554-55, 1558-59, 1562-63 y 1565-66. Pero también lo fue de Metafísica (1559-61, 1563-64 y 1566-67), de Lógica (1561-62 y 1564-65), de Sagradas Escrituras (1576-90 y 1596-97) y de Teología (1567-70 y 1586-87) [Garcia Villoslada 1954, pp. 323, 327, 329 y 331]. Giacobbe [Giacobbe 1977, pp. 53] afirma que también fue profesor de Retórica pero en el elenco de profesores del Collegio Romano de García Villoslada [Garcia Villoslada 1954, pp. 322-336] no figura como tal. La figura de este valenciano ha sido poco estudiada; tanto es así, que su nombre y apellidos han sufrido bastantes deformaciones, siendo citado por los nombres de Benito, Benoft, Benet, Benedictus y por los apellidos de Pereyra, Pereira, Perera, Pererius. Recientemente se ha publicado un artículo sobre este personaje [Blum 2006].

18 El proceso de cambio experimentado en la enseñanza de las matemáticas y en el estatus social de sus enseñantes está explicado en [Biagioli 1989]. El propio desarrollo conceptual interno de la materia es el primero de los motivos aducidos por Biagioli de este proceso [Biagioli 1989, pp. 43]. También destaca el rol secundario jugado por las Universidades en el proceso [Biagioli 1989, pp 51-52] y [Feingold 2003, pp. 5], aunque [Favino 2006, pp. 357] dice que ésto es un prejuicio historiográfico.

19 A la muerte de Ignacio en 1556 había 35 escuelas jesuítas mientras que a fin de siglo, en 1599, eran 245 y, tan sólo unos años después, en 1615, ya habían alcanzado las 372 escuelas. Ver [Smolarski 2002, pp 448]. Los motivos de este crecimiento de instituciones educativas fueron a) el crecimiento de población, b) la necesidad de educación formal para círculos mucho mayores de población (ciudades) y c) la pugna catolicismo protestantismo precisaba de difusores bien formados [Donnelly 1982, pp. 45-46].

20 Hoy conocido como Pontificia Universidad Gregoriana. Como destaca Baldini [Baldini 1992, pp. 37 y 63] todos los personajes influyentes del Collegio en sus primeros años fueron de extracción hispana.

21 Como se puede comprobar, todavía se respira un ambiente medievalista: si sustituimos el astrolabio por la música, las cuatro disciplinas son las del quadrivium. No obstante, en versiones posteriores se ampliarán el número de disciplinas y de autores a estudiar.

A partir de 1560, bajo la dirección de Diego de Ledesma, un grupo de profesores del Collegio Romano, inician la redacción de un plan de estudios con la voluntad de que se aplique en todos los colegios de la Orden. El sucesor de Baltasar Torres, Cristophorus Clavius (1538-1612) no participará directamente en este grupo de trabajo, sino que se limitará a escribir documentos sobre la enseñanza de las matemáticas[22] , que ejercerán notable influencia sobre los trabajos de este grupo[23] .

El resultado de dichos trabajos será la Ratio Studiorum, aprobada el 8 de enero de 1599, aunque tendrá ligeros retoques en 1615. No obstante, existen dos borradores anteriores, de 1586 y 1591, para su discusión en los diferentes estamentos de la Orden. Precisamente, los documentos de Clavius en defensa de la enseñanza de las matemáticas son de esta época, pudiéndose fechar en los años ochenta y principios de los noventa. En ellos, Clavius insiste en tres aspectos básicos:

- La necesidad de extender los estudios de matemáticas a todos los alumnos.
- La necesidad de las matemáticas para el estudio de la filosofía natural.
- La necesidad de tener buenos profesores en esta disciplina.

El borrador de 1586[24] contiene una verdadera apología de las matemáticas. Apoyándose en una mención a la disciplina existente en las Constituciones de Ignacio de Loyola[25], empieza diciendo que no puede privarse a ninguna escuela de esta enseñanza porque en las más célebres academias, las matemáticas tienen siempre su lugar e, incluso a veces, el más relevante. Y todavía más, porque las otras ciencias necesitan mucho la ayuda de las matemáticas. Y para ilustrarlo dice que las matemáticas suministran ayuda a los poetas (sobre la salida y ocaso de los astros), a los historiadores (sobre la forma y distancia de los lugares), a los filósofos (sobre ejemplos de demostraciones sólidas), a los políticos (sobre la forma de administrar bien los asuntos civiles y militares), a los físicos (sobre la forma y la diversidad de las revoluciones celestes, de la luz, de los colores, del medio transparente y del sonido), a los metafísicos (sobre el número de esferas y de inteligencias), a los teólogos (sobre la mayor

22 Uno de estos documentos ha sido estudiado de forma extensiva por Romano Gatto recientemente [Gatto 2006]. También Smolarski ha estudiado el conjunto de estos ma- nuscritos de difícil datación [Smolarski 2002] y [Smolarski 2002-1].

23 Ver [Smolarski 2002, pp. 450].

24 En [Smolarski 2002, pp. 459 y ss.] puede encontrarse una traducción al inglés de los pasajes de estos documentos refrentes a las matemáticas. Los pasajes entrecomillados que vienen a continuación, son traducciones castellanas literales de esta traducción inglesa.

25 Constituciones. Parte IV, Cap. 12, parte C [Barbera 1942, pp. 104]: "Se estudiará lógica, física, metafísica y moral, y también las matemáticas, en cuanto convengan al fin que se pretende". La influencia de Ignacio y de los demás fundadores también se manifiesta en el método de enseñanza: el modus parisiensis, como señala [Cosentino 1971, pp. 205].

parte de la obra divina), a la ley y a la liturgía (sobre la contabilización del tiempo); todo ello sin tener en cuenta los beneficios que de ellas se derivan en la cura de enfermedades, en los viajes marinos y en la actividad agrícola. Por ello, demanda un esfuerzo de la Compañía para que las matemáticas "florezcan en nuestras escuelas como las demás disciplinas". A continuación, reconoce la carencia de profesores preparados, incluso en Roma ("con la excepción de uno o quizás dos"), para enseñar matemáticas con solvencia o para instruir a la Sede Apostólica sobre el calendario[26]. Después de exponer esta situación, en el segundo párrafo apunta las propuestas para mejorar la situación de la disciplina. Dotar al Collegio Romano de dos profesores: uno que exponga la asignatura, basándose fundamentalmente en Euclides y en los Analíticos Posteriores, y otro ("que sólo puede ser el padre Clavius") que únicamente tendrá 8 o 10 alumnos de los "nuestros", de varias procedencias y que ya conozcan la filosofía, para que les enseñe matemáticas en profundidad[27] y al finalizar sus estudios de tres años puedan volver a sus lugares de procedencia para enseñar allí esta disciplina.

En otra versión del mismo borrador de 1586 se llega al detalle de explicar como hacer las clases recopilatorias de los sábados, haciendo que los alumnos se interroguen entre ellos de la siguiente forma: "Repite la proposición. ¿Cómo se demuestra? ¿Puede demostrarse de otra manera? ¿Qué utilidad tiene para las artes o para la vida común?". Esta segunda versión insiste con mayor urgencia en la creación de la academia de profesores de Clavius[28] .

El segundo borrador de 1591 y el documento finalmente aprobado en 1599 por el general Acquaviva, son mucho menos radicales. En ambos de- saparece la apología de la disciplina y se reducen los tiempos de dedicación y el número de estudiantes académicos. A pesar de que en el documento finalmente aprobado no se dice nada respecto a la creación de la Academia de Matemáticas en el Collegio Romano, parece evidente que Clavius actuó como formador de profesores de matemáticas aunque no se crease formalmente dicha academia. Ello está acreditado por el buen número de matemáticos formados en esos años en el Collegio Romano que ejercieron su magisterio en otros lugares[29]. Al ya citado Mateo Ricci (1552-1610), quien introdujo Euclides en China, pueden añadirse Christopher Grienberger (1564-1636)

26 La referencia a Clavius, sin citarlo por su nombre, es clarísima: el Santo Padre le había encomendado la tarea de reformar el calendario. De sus trabajos surgió el calendario gregoriano que todavía usamos hoy.

27 La idea es que estudien sólo matemáticas durante dos años y, en el tercer curso, las combinen con la teología.

28 De hecho, es muy posible que Clavius ya estuviese haciendo este trabajo de formador desde varios años antes [Feingold 2003, pp. 48]. Mateo Ricci (1552-1610), el introductor de Euclides en China, fue alumno del Collegio Romano (y de Clavius) entre 1572 y 1577, diez años antes del documento.

29 En [MacDonnell 1989] puede encontrarse una relación casi exhaustiva de los geómetras jesuítas, aunque no incluye una genealogía de los mismos.

continuador de Clavius en el Collegio Romano, Paul Guldin (1577-1643) enseñante en Viena y Graz, Christopher Scheiner (1575-1650) que enseñó en Alemania y mantuvo una larga controversia con Kepler sobre Óptica, Juan Bautista Villalpando (1552-1608) más conocido como arquitecto aplicando en este arte la geometría, Gregorio de St. Vincent (1584-1667), profesor en el poderoso colegio de Lovaina, etc. Esta colección de profesores se fue extendiendo por toda Europa como un mancha de aceite.

Precisamente una muestra de esta mancha de aceite reside en la formación de Jean André Tacquet (1612-1660)[30]. El profesor de Tacquet en Lovaina durante los cursos de 1633/34 y 1634/35 fue Guillaume Boelmans (1603-1638) quien, a su vez, había sido discípulo del ya mencionado Gregorio St. Vincent, discípulo directo de Clavius en Roma[31]. Conviene reseñar que, a pesar de que St. Vincent es más conocido por sus aportaciones al cálculo[32], tiene también una extensísima obra geométrica: el Opus Geometricum posthumum que, como su nombre indica fue publicado, una vez muerto el autor, en 1668. Del análisis de los manuscritos de St. Vincent, parece acreditada la participación de Boelmans en dicha edición[33]. Por todo ello, la formación matemática (y geométrica en particular) de Tacquet fue considerable.

3. Los Elementos de Euclides: base para la geometría

Nuestra atención se centra en la geometría de los siglos XVI y XVII, que, al contrario del álgebra[34], no fue un área innovadora. El objetivo de los geómetras de la época, jesuítas o no, era la restauración del conocimiento griego que se había perdido durante la Edad Media[35]. Desde finales del siglo XIII, el texto clásico de los Elementos había sido la traducción de Campanus de Novara procedente de fuentes árabes y que fue el primer libro de geometría que se dió a la imprenta en 1482. La primera traducción directa de fuentes griegas hecha por Bartolomeo Zamberto se publica en 1505 en Venecia y la ediciónprinceps de Simon Grynnaeus (en griego original) se publicó en 1533. Conjuntamente con esta edición,

30 Lo más parecido a una biografía de este personaje es un artículo de Bosmans de 1925 [Bosmans 1925]. También se pueden encontrar algunas indicaciones biográficas en [Bosmans 1927, pp. 66-69].

31 Ver [Looy 1980, pp. 280].

32 Ver [Meskens 1994] y [Dhombres 1993].

33 Hay que tener en cuenta que St. Vincent tuvo dos ataques de aplopejía en 1628 y 1659 que mermaron notablemente su capacidad creadora, por lo que los manuscritos del Opus son muy anteriores a su publicación [Looy 1980, pp. 281].

34 Es la época de Tartaglia (quien, por cierto, también publicó una traducción italiana de los Elementos en 1565), Cardano, Recorde, Bombelli, Viète, Napier, etc.

35 Ver [Homann 1983, pp. 245-246]. De hecho, las primeras reformas en la enseñanza de la geometría se producirán en el siglo XIX [Cajori 1910, pp. 200-201].

Grynnaeus incluyó el extenso Comentario al libro 1º de los Elementos de Proclo (411-485), que contenía interesantes reflexiones metamatemáticas desde un punto de vista platónico. Tal fue el interés de este comentario que fue traducido al latín por Francesco Barozzi y publicado en 1560. En 1572 aparece una nueva traducción comentada de los Elementos, la de Federico Commandino (1506-1575) por encargo del Duque de Urbino[36].

La edición de Clavius

La edición de Clavius de los Elementos (1574) obedece al sentido académico que tenía el autor de su trabajo en el Collegio Romano. Es muy probable que su fuente original fuera la traducción de Bartolomeo Zamberto (edición bi-lingüe de 1510) que Oronce Finé (1494-1555) había editado en París y que fue publicada al menos en tres ocasiones en vida de Finé (1536, 1544 y 1551)[37]. Prueba de ello es que Clavius inicia su edición con 36 definiciones[38] que, son plenamente coincidentes (salvo cambios retóricos) con las 35 definiciones de la edición de Finé, salvo unas pocas excepciones:

- Finé introduce (def. 19) una definición de sector circular inferior al semicírculo, que no existe en Clavius.
- Clavius introduce (def. 35) una definición de paralelogramo, que no existe en Finé[39].
- Clavius introduce (def. 36) una definición de "diámetro de un parale-logramo" (diagonal) y de sus propiedades, que no existe en Finé.

No obstante, esta correlación se pierde, al menos en parte, en los postulados y nociones comunes: Mientras Finé introduce los cinco postulados tal como los conocemos hoy en día[40], Clavius sólo introduce los tres primeros (regla y compás) añadiendo un cuarto que más bien tiene apariencia de noción común: "A cualquier magnitud dada, se le puede añadir otra

36 Hemos referido las ediciones más influyentes, sin embargo, contemporáneamente, hubo otras ediciones a cargo de Petrus Ramus (1569), Candalla (1566) y Pelletier (1557 y 1572). Ver [Baldini 1993, pp. 30]. Para una relación (no exhaustiva) de las obras publicadas en el siglo XVII, ver [Kokomoor 1928].

37 Conviene tener presente que Oronce Finé fue muy probablemente profesor de los fundadores de la Compañía en la Universidad de Paris y no es descabellado pensar que, tanto Diego Laínez (primer general después de Ignacio) como Baltasar Torres (primer profesor de matemáticas en el Collegio Romano), ejerciesen alguna influencia sobre Clavius.

38 Las ediciones actuales de los Elementos, empiezan con 23 definiciones, 5 postulados y 5 (a veces 9) nociones comunes.

39 Esta definición es importante porque afirma la existencia de paralelogramos. Aunque no de rectángulos, que será el problema que abordará Saccheri.

40 El texto canónico de los Elementos fue establecido por Heiberg a finales del siglo XIX. La edición crítica que hemos utilizado es la de Bernard Vitrac por ser la más reciente [Euclides - Vitrac]. La traducción de Commandino tiene esta misma estructura por lo que la reasignación de Clavius parece proceder de François de Foix-Candale (Francisco Flusate Candalla) quien en su edición de los Elementos de 1566 dice que los postulados permiten construir figuras (regla y compás) mientras que las nociones comunes afirman algo sobre figuras ya construidas [Baldini 1993, pp. 28-29].

magnitud, tanto mayor como menor"[41]. Algo similar sucede con las nociones comunes: Ambos autores coinciden en las diez primeras[42], aunque Finé es más parco en su texto, pero Clavius añade diez más hasta llegar a las veinte. De hecho, las nociones comunes 12 y 13 de Clavius son los postulados 4 y 5 de Finé (y de Heiberg). Ambos autores introducen la NC 5 a todas luces innecesaria[43] ya que puede deducirse de las restantes. Conviene, pues, repasar las adiciones de Clavius:

- NC 10 Clavius: "Dos líneas rectas no tienen uno y el mismo segmento en común"[44].
- NC 11 Clavius: "Es necesario que dos rectas concurrentes en un punto, se intersequen en dicho punto al prolongarse"[45].
- NC 12 y 13 Clavius: Como ya se ha dicho son los postulados 4 (igualdad de todos los ángulos rectos) y 5 (postulado de las paralelas) de Finé (y de Heiberg).
- NC 15, 16, 17 y 18: Se refieren a los excesos (defectos) que se obtienen al añadir magnitudes desiguales a magnitudes iguales o viceversa. De hecho son corolarios de la NC 4.
- NC 19: "Cualquier total es igual a la suma de todas sus partes"[46].
- NC 20: "Si un todo se dobla, lo obtenido es el doble de lo añadido"[47].

La organización de postulados y nociones comunes de ambos autores, no obedece a la idea euclídea de separar los principios lógicos genéricos (nociones comunes o axiomas) de los puramente geométricos (postulados) ya que tanto uno como otro, después de introducir las nueve nociones comunes tradicionales[48], agregan axiomas que son puramente geométricos: en Clavius las NC 10, 11, 12, 13 y 14 y en Finé la NC 10.

41 [Clavius 1612, pp 23].
42 Aunque la 10 de Finé [Fine 1551, pp. 7v] es la 14 de Clavius [Clavius 1612, pp. 25]: "Dos rectas no encierran un espacio". Esta afirmación es utilizada por el propio Euclides en la P4 aunque Heiberg lo considera una interpolación, igual que la NC9 [Euclides - Vitrac, pp. 201]. De hecho, si se considera (como hace Proclo) que una recta está enteramente determinada por dos de sus puntos esta afirmación es innecesaria [Euclides - Vitrac, pp. 179].
43 "Si a cosas desiguales se les restan cosas iguales, los restos son desiguales" [Clavius 1612, pp. 23] y [Fine 1551, pp. 7].
44 [Clavius 1612, pp. 24].
45 [Clavius 1612, pp. 24].
46 [Clavius 1612, pp. 26].
47 [Clavius 1612, pp 26].
48 Como ya se ha dicho, hoy en día se considera que las nociones comunes son 5 o 9, dependiendo si se considera que las NC 4, 5, 6 y 9 son interpolaciones o no. Para un análisis detallado ver [Euclides - Vitrac, pp. 178-184]

Otra similitud entre ambos textos es la división de las proposiciones entre "problemas" y "teoremas"[49]: Mientras los primeros son tan sólo instrucciones de construcción (al final de las cuales hay que demostrar que lo construido es lo solicitado), los segundos son puras demostraciones que establecen verdades matemáticas como las de los axiomas o postulados, tal como explican ambos autores al finalizar la exposición de las Nociones Comunes[50]. Así, por ejemplo, las proposiciones 1 y 2[51] son consideradas y numeradas como "pro-blema", mientras que las proposiciones 4 y 5[52] son consideradas "teorema". Ambos autores siguen, pues, una doble numeración: la de las proposiciones (idéntica a la de la edición Heiberg) y la de problemas o teoremas[53]: de esta forma, por ejemplo, las 48 proposiciones del libro primero se agrupan en 14 problemas y 34 teoremas, coincidentes en ambos autores. Esta doble numeración ya había sido usada por Proclo en su Comentario al Libro Primero, plenamente coincidente con las de Finé y Clavius.

Un estudio pormenorizado del Libro Primero nos indica que Clavius no se conforma con los comentarios de Finé, sino que los amplía y enriquece con nuevas reflexiones: su finalidad, aunque no abiertamente expresada, es la de escribir un libro que sirva como guía a los profesores de matemáticas que debían formarse en el Collegio Romano, para luego enseñar matemáticas en todos los colegios de la Orden. Así, muchas proposiciones se enriquecen con escolios y corolarios inexistentes en las obras anteriores; con observaciones de carácter práctico para resolver problemas constructivos; también añade Clavius comentarios y demostraciones alternativas de Apolonio[54], de Eudemo[55], de Filón[56], de Herón[57], de Menelao[58], de Nicomedes[59], de Proclo[60], de Pelletier[61], de Pitágoras[62], de Porfirio[63], de

49 De hecho, todas las traducciones de la época (la de Commandino, la de Tartaglia al italiano, etc.) siguen esta división heredada de Proclo.

50 Ver [Clavius 1612, pp. 27-28] y [Fine 1551, pp. 7v].

51 "Construir un triángulo rectángulo" y "Dibujar una recta igual a otra dada".

52 "Igualdad de triángulos cuando tienen dos lados y el ángulo incluido iguales" e "Igualdad de los ángulos en la base de un triángulo isósceles".

53 Así, por ejemplo, la Proposición 5 es, al propio tiempo, el Teorema 2; y la Proposición 9 es, simultáneamente, el Problema 4.

54 En la proposición 28 [Clavius 1612, pp. 49].

55 En la proposición 32 [Clavius 1612, pp. 56].

56 En las proposiciones 20 y 25 [Clavius 1612, pp. 43 y 46 respectivamente].

57 En la proposición 8 [Clavius 1612, pp. 34].

58 En la proposición 25 [Clavius 1612, pp. 46].

59 En la proposición 28 [Clavius 1612, pp. 49-50].

60 En las proposiciones 2, 3, 4, 6, 11, 14, 15, 16, 17, 19, 20, 21, 24, 25, 28, 31, 34, 37, 41, 43, 46, y 47 [Clavius 1612, pp. 30, 30, 30, 32, 37, 39, 40, 4., 41, 42, 43, 43, 45, 46, 48-53, 54, 61-62, 64, 71, 72, 74 y 76 respectivamente]

Teón[64], de Vitrubio[65], de Platón[66], de Campanus[67] o de Pappus[68]. Para hacerse una idea de la cantidad de añadidos de Clavius, basta con constatar que el Libro Primero ocupa en la edición de Finé 53 páginas[69] mientras que la edición de Clavius ocupa 69[70] y ello sin tener en cuenta de que, a pesar de estar impresos ambos libros "in quarto", la tipografía utilizada en la edición de Clavius es mucho más pequeña, admitiendo más de 700 palabras por página, mientras que la de Finé no admite más de 400, incluyendo además el enunciado en griego de cada proposición. Es decir, más del doble de palabras en Clavius que en Finé para un solo libro. Ello nos indica la vastedad de los conocimientos puestos en juego por Clavius en su edición.

Es muy probable que Clavius tuviera la intención de escribir un libro de características parecidas para cada una de las ramas de las matemáticas[71] y, quizá por ello, incluyó en éste un Prolegomena sobre las disciplinas matemáticas. Este Prolegomena resulta bastante interesante y es una lástima que no haya sido traducido en su integridad; se extiende a través de siete páginas[72] y se divide en nueve apartados cuyos títulos son:

1. ¿Por qué se llaman así las Disciplinas Matemáticas?
2. División de las Disciplinas Matemáticas.
3. Inventores de las Disciplinas Matemáticas.
4. Nobleza y prestancia de las Ciencias Matemáticas.
5. De la varias utilidades de las Disciplinas Matemáticas.
6. Excelencia de Euclides y de la Geometría.
7. División de la Geometría y de los Elementos de Euclides.
8. Qué es un problema, qué un Teorema, qué una Proposición y qué un Lemma entre los matemáticos.

61 En las proposiciones 15 , 34 , 38 , 42 , 43 , 44, 45 y 47 [Clavius 1612, pp. 39, 60, 65, 71, 72, 73, 74 y 75 respectivamente]. Con Pelletier mantuvo Clavius una agria disputa sobre el ángulo de contacto (P16 L3) [Loget 2002, pp. 210-211] y [Maieru 1990].

62 En las proposiciones 32, 47 y 48 [Clavius 1612, pp. 56, 76 y 79 respectivamente].

63 En las proposiciones 14 y 20 [Clavius 1612, pp. 39 y 43 respectivamente].

64 En la proposición 24 [Clavius 1612, pp 46]. Esta es especialmente interesante porque no se halla en ediciones anteriores, ni siquiera en Proclo.

65 En la proposición 47 [Clavius 1612, pp. 76].

66 En la proposición 47 [Clavius 1612, pp. 76].

67 En las proposiciones 19, 32 y 39 [Clavius 1612, pp. 42, 57 y 66 respectivamente].

68 En las proposiciones 9, 34 y 47 [Clavius 1612, pp. 35, 61 y 79 respectivamente].

69 De la página 1r hasta la 27r con sus versos no numerados.

70 Desde la página 13 hasta la 81 inclusive.

71 Así lo afirma Knobloch [Knobloch 1998, pp. 351] entre otros.

72 Véase [Clavius 1612, pp. 3-9].

9. Qué son los Principios entre los matemáticos[73].

Clavius no entra directamente en la quæstio, pero no deja de citar a Barozzi[74], quien había defendido que las matemáticas tenían un estatus intermedio entre la sensación y el intelecto, por lo que debían ser consideradas como la primera de las ciencias, ya que ejercían una función mediadora entre la física y la metafísica. En este sentido es clara la influencia del Comentario de Proclo[75] al libro primero de los Elementos. Como se puede comprobar por los enunciados de las distintas partes del prolegomena, Clavius refleja en los mismos las principales inquietudes que los jesuítas van a introducir en su sistema educativo: la preminencia de la geometría, la inclusión de la astronomía, el sentido utilitario de la matemática, la necesidad de su conocimiento para otras disciplinas (fundamentalmente para la filosofía natural), etc. Pero no sólo eso, sino que está haciendo una defensa cerrada del uso de las matemáticas en el estudio de la naturaleza: Como puede verse, los últimos cuatro apartados están dedicados a la Geometría en particular. Clavius intenta demostrar que los elementos de la geometría son las partes elementales de las que están compuestas todas las realidades corporales.

La edición de Tacquet

Pertenece a una extendida tradición de divulgación de la obra euclídea mediante manuales y libros de texto de uso escolar. Esta tradición ya había nacido en el siglo XVI con autores como Flussatus Candalla (François de Foix, Comte de Candale, 1502-1594), el propio Oronce Finé (1494-1555), Johannes Buteo (1492?-1564,1572?), Jacques Peletier (1517-1582), etc., pero en el siglo XVII adquiere forma definitiva. Las obras inscritas en esta tradición tienen algunas características comunes: reducción de las demostraciones, eliminación de proposiciones (incluso de libros enteros) e introducción de símbolos para facilitar la comprensión. No obstante, algunos de ellos incluyen algunas creaciones nuevas. Durante el siglo XVII (además de la estudiada) pueden citarse obras de Isaac Barrow (1630-1677), del jesuíta Claude-François Milliet de Chales (1621-1678) en lengua francesa con innumerables

73 Curiosamente, en este apartado afirma que los principios matemáticos son de tres tipos: definiciones, peticiones o postulados y axiomas o nociones comunes. La diferencia entre los dos últimos es que los postulados son verdades propias de la ciencia objeto de estudio, mientras que los axiomas son verdades comunes a todas las ciencias [Clavius 1612, pp. 9]. Sin embargo, como ya hemos visto, no aplica consistentemente esta idea en su distribución de postulados y axiomas en la geometría.

74 [Clavius 1612, pp. 3]. Sobre la obra de Francesco Barozzi ver [Giacobbe 1972-2].

75 Como ya se ha dicho, Barozzi fue el primer traductor al latín de dicho comentario en 1560. La influencia del Comentario de Proclo ha sido estudiada por Kessler [Kessler 1995].

ediciones y cubriendo los mismos libros que Tacquet, del también jesuíta Gaston Ignace Pardies (1636-1673) en lengua francesa y otras[76].

El libro de Tacquet es una muestra perfecta de esta tradición con más de treinta ediciones durante el siglo XVIII. Sólo contiene los libros I-VI y XI-XII de los Elementos originales, pero incluye material adicional de Arquímedes. Sus demostraciones son compendios, pero añade abundantes corolarios y escolios muy útiles desde el punto de vista pedagógico Esta obra se distingue de las de su misma tradición por su orden y claridad. Al contrario que la edición de Clavius, se trata de un libro destinado a ser usado como manual por los alumnos de los colegios jesuitas.

Su planteamiento es netamente euclídeo partiendo de definiciones, postulados y axiomas (nociones comunes). Sin embargo, su contenido y ordenación tienen características propias que lo distinguen tanto de la edición canónica de Heiberg como de la edición de Clavius. Sumariamente pueden exponerse las siguientes (siguiendo la numeración Heiberg):

- En el excurso de las definiciones 2, 5 y 7 (línea, superficie y superficie plana) nos dice que podemos entenderlas generadas por un flujo de puntos, de líneas o de rectas respectivamente[77].
- A continuación de la definición 8 (ángulo) añade cuatro definiciones más: lados, vértice, igualdad y desigualdad[78].
- Omite la definición 13 (límite).
- En el excurso de la definición 18 (semicírculo) plantea la generación del círculo mediante el giro de un radio (flujo) sobre uno de sus extremos.
- Modifica sustancialmente la definición 23 (paralelas) sutituyendo la noción de no concurrencia por la de equidistancia.
- Incluye dos definiciones nuevas: diámetro (diagonal) de un paralelogramo y ángulo externo de una figura rectilínea.
- Desaparece el 4º postulado (igualdad de los ángulos rectos), que pasa a ser la Noción Común 10.
- Desaparece el 5º postulado (de las paralelas).

76 No obstante, esta producción se irá alejando cada vez más de la estructura euclidiana al incorporar la perspectiva algebraica como resultado de la visión revolucionaria de Descartes [Davis 1995, pp. 212].

77 Esta idea de entender las líneas generadas como un flujo de puntos ya había sido introducida por Clavius, quien en el excurso de la definición 2 dice: "lineam nil esse aliud, quam puncti fluxum" (la línea no es otra cosa que un flujo de puntos) [Clavius 1612, pp. 14]. No obstante, es muy posible que el influjo del cálculo haya ido consolidando esta idea desde la época de Clavius hasta hacerla unánime.

78 Definiciones 9 a 12 [Tacquet 1683, pp. 4].

- Añade una noción común (NC 11) en la que afirma que las rectas paralelas tienen perpendiculares comunes (es decir: si una recta es perpendicular a una paralela, también lo será a la otra)[79]. No obstante, antes de enunciar esta noción común, expone el 5º axioma euclídeo y afirma que no es axioma sino teorema (como ya habían dicho Gemino y Proclo) que demostrará en la proposición 31 del Libro I[80].
- Añade dos nuevas nociones comunes[81]:
    - NC 12: "Dos perpendiculares a unas paralelas determinan segmentos iguales en cada una de ellas".
    - NC 14: "Dos rectas no tienen un segmento en común y todas las líneas rectas (se supone que no paralelas, aunque no lo dice) se intersecan en un sólo punto".

Esta reorganización de los principios tiene al menos dos aspectos reseñables: la introducción del movimiento de las figuras geométricas y la preocupación por el postulado de las paralelas. Respecto a la primera cabe señalar que Euclides había sido muy cuidadoso con el tema del movimiento y lo excluye totalmente de su modelo[82]; por ello incluye el 4º postulado que le evita tener que demostrar la congruencia de los ángulos rectos mediante una traslación. Este cuidado ya se había relajado con Clavius, quien, manteniendo las ideas euclídeas, nos habla en el excurso de la Definición 2 del movimiento (motu imaginario) de los puntos para formar una línea, "quam puncti fluxum"[83]. Sobre esto, hay que tener presente que quizá la idea griega de movimiento no es totalmente coincidente con nuestra idea actual: para los griegos, el movimiento podía ser muchas cosas (incluso la corrupción y la generación) y, de ello, se deriva el cuidado euclídeo para evitar su irrupción en la geometría. Precaución que se irá desvaneciendo con el tiempo, al reservarse la noción de movimiento a algo puramente mecánico. Esta relajación, obliga a introducir principios de congruencia, como los que añade Tacquet a continuación de la Definición 8 sobre igualdad y desigualdad de los ángulos.

Numerosos ejemplares de la obra se encuentran por bibliotecas de toda Europa y de ellos hemos establecido que, como mínimo, el libro fue editado en los lugares y las fechas que se citan:

Lugar	**Editor**	**Fechas**	**Num.edic.**

79 "Paralaleae lineae communi perpendiculo utuntur. Hocest, recta, quae ad parallelarum unam perpendicularis, est quoque perpendicularis ad alteram" [Tacquet 1683, pp. 12].
80 [Tacquet 1683, pp. 11-12].
81 [Tacquet 1683, pp. 12].
82 Salvo en P4 y P8 (igualdad de triángulos cuando tienen dos lados y un ángulo igual) en los que no tendrá reparo alguno en "aplicar" (significa ajustar, acomodar) un ángulo sobre otro. De hecho, por la NC 7, está autorizado a ello, aunque la utiliza en raras ocasiones.
83 Se trata del ya comentado excurso de la Definición 2 [Clavius 1612, pp. 13-14].

Amberes	Jacobum Meursium	1654, 1665, 1672	3
Padua	Pietro M. Frambotti	1674	1
Amsterdam	Heynrich Wetstein	1683	1
Padua	Tipografía del seminario	1691, 1694, 1721	3
Amsterdam	Franciscum van der Plaat	1701	1
Cambridge	Cornelius Crownfield	1703, 1710, 1712	3
Londres	W. y J. Marshall	1705	1
Londres[84]	Roberts, Senex y Maxwell	1714	1
Londres	Senex y Taylor	1719	1
Amsterdam	P. de Coup	1725	1
Dublin	S. Fuller	1728	1
Padua	Giovanni Manfré	1729, 1738, 1751, 1754, 1772, 1783.	6
Wirceburg	J.J.C. Kleyer	1740	1
Milán	Francesco Agnelli	1741	1
Nápoles	Giuseppe A. Elia	1744, 1784	2
Roma	Monaldini y Mainardi	1745	1
Venecia	Joseph Bertella	1746	1
Londres	Ynnis, Longman, Shewell	1747	1
Venecia	Remondini	1756, 1762	2
Dublín	I. Jackson	1772	1
Venecia	Bassani	1781	1
Dublín	W. McKenzie	1785	1
Padua	Conzati	1789, 1801	2
Viena	Georgiu Vendote	1805	1

Lo cual hace un total de no menos de 38 ediciones que se extienden desde la primera edición de 1654, hasta la última (en griego moderno) de 1805. Curiosamente, no existe

84 Esta edición y la siguiente son atribuidas a William Whiston (sucesor de Newton en la cátedra Lucasiana de Cambridge) a pesar de que en su página de título pone claramente "By the Learned Andrew Tacquet". Whiston es el traductor al inglés, aunque podría haber añadido algunos corolarios [Barrow-Green 2006, pp. 11].

ninguna edición hecha ni en Francia ni en España, sin embargo las bibliotecas francesas y españolas conservan numerosos ejemplares de este texto[85].

4. El problema de las paralelas en Clavius y en Tacquet

Como es conocido, Euclides no utiliza el 5º Postulado hasta la proposición 28 del Libro Primero[86]. Este postulado ya debió ser debatido en la Grecia clásica, aunque no han llegado hasta nosotros estos debates; la prueba de ello es que el mismo Proclo propone una demostración de este postulado, recogida por Clavius en el escolio a la Proposición 28[87]. Es natural que pudiera suscitar dudas, ante una redacción tan larga en contraposición a los cuatro anteriores, breves y claros y en contraposición, también, a otras proposiciones que son demostradas y que son incluso más obvias[88].

En un anexo se detallan las exposiciones de Clavius y Tacquet del conjunto del Libro Primero comparadas con el texto canónico de Euclides, para facilitar la comprensión de las ideas de cada uno de los autores.

Clavius, en primer lugar, recoge y explica correctamente la demostración de Proclo[89], que está basada en la siguiente premisa: "Si dos rectas que forman un ángulo se prolongan infinitamente, la distancia entre ambas excederá cualquier magnitud dada". No obstante, Clavius expresa su escepticismo sobre esta fórmula diciendo que Proclo necesita esta premisa pero, por otra parte, "Aristóteles ya ha demostrado que el mundo no es infinito en el Libro Primero del De caelo". Naturalmente, Clavius no puede aceptar el plato-nismo extremo de Proclo[90] que le permite aceptar alguna idea de infinito en sentido actual[91].

Por eso Clavius busca una demostración alternativa basada en la equidistancia y establece también una premisa de la que dependerá toda la demostra-ción: "La línea cuya totalidad de

85 En la Biblioteca de la Universidad de Barcelona, por ejemplo, existen al menos tres ejemplares: Amsterdam, 1683; Roma, 1745 y Padua, 1754.

86 Aunque en la proposición 27 utiliza la definición de paralelas, estableciendo con ello su existencia y excluyendo, por tanto, toda posibilidad de geometría elíptica. Como ya advertirá Saccheri [Saccheri 1733, pp. 9], la existencia de paralelas depende de las proposiciones 16 y 17 del libro Primero. Ver capítulo 5.

87 Ver [Clavius 1612, pp. 48-49].

88 Basta con citar la P 15: "Si dos rectas se cortan, hacen los ángulos del vértice iguales entre sí".

89 Según [Maieru 1978, pp. 192] ésta es la única demostración que existe en la primera edición de Clavius (1574), quién la considera óptima. No obstante, en la edición de 1589 incluirá además su propia demostración que será la premisa más importante del trabajo de Saccheri [Maieru 1978, pp. 211] y [Maieru 1982].

90 Cosa que ya se encarga de precisar en el Prolegomena, diciendo que la doctrina platónica de la reminiscencia no está aceptada por la fe cristiana: quod tamen Christiana fides falsum esse perspicue docet [Clavius 1612, pp. A2].

91 Probablemente sea Proclo el primero en reflexionar sobre el sentido actual del infinito (y no meramente potencial, como defendían los aristotélicos) y de aceptarlo desde un punto de vista intelectivo [Proclo, pp. 232].

 Cuaderno de Materiales, Nº23, 2011, 575-600, ISSN: 1139-4382

puntos equidistan de una recta existente en el mismo plano, es recta"[92]. Clavius, sin pretender demostrarlo, da una larga explicación y acaba diciendo que "es claro como la luz del día", que "ninguna mente sana puede negarlo" y que "es mucho más facil de asentir que el axioma 13 de Euclides" (5º postulado)[93]. Lo que no se entiende es porqué no lo ha incluido entre los postulados si cumple todas estas condiciones. Los lemas que pone a continuación son consecuencia más o menos directa de este postulado:

- "Si una recta se mueve transversalmente siempre en ángulo recto sobre otra recta, entonces el otro extremo describirá una línea recta"[94]. Nótese que es consistente con su idea de recta expresada en las definiciones (flujo de puntos).
- "Si sobre una recta se erigen dos perpendiculares iguales y se unen sus extremos con otra recta, todas las perpendiculares trazadas desde esta última a la primera serán iguales"[95]. Nótese que, sin decirlo, está construyendo un rectángulo, cosa que Euclides no hace y que será el inicio del análisis de autores posteriores (Giordano, Saccheri, Lambert).
- "Si sobre una recta se erigen dos perpendiculares iguales y se unen sus extremos con otra recta, ésta última hará ángulo recto con ambas perpendiculares"[96]. Nótese que sin el 5º Postulado puede demostrarse que ambos ángulos son iguales, pero nada más. Este será precisamente el punto de partida de Saccheri: ¿y si los ángulos no son rectos?[97]
- "Si en dos rectas incide una tercera haciendo ángulo recto en una de ellas y agudo en la otra, las dos rectas distarán cada vez menos entre sí por la parte del ángulo agudo y por la otra parte cada vez distarán más entre sí"[98]. Y de ello, ya puede colegir el 5º postulado.

Vemos, pues, que lo que ha hecho Clavius ha sido sustituir un postulado por otro equivalente.

Algo parecido hace Tacquet, con la única salvedad de que, consistentemente, incluye los dos postulados sustitutivos entre las Nociones Comunes[99] Se trata de las Nociones Comunes

92 [Clavius 1612, pp. 50].
93 [Clavius 1612, pp. 50].
94 [Clavius 1612, pp. 51].
95 [Clavius 1612, pp. 51].
96 [Clavius 1612, pp. 51].
97 Ver capítulo 5.
98 [Clavius 1612, pp. 52].
99 Ya se ha comentado con anterioridad, el escaso rigor de ambos autores en la distinción entre Postulado (puramente geométrico) y Noción Común (válido para todas las matemáticas y demás ciencias).

11 y 12 que ya hemos señalado ante-riormente. Con ellos, al acabar la demostración de la proposición 31, puede demostrar el 5º Postulado de la siguiente manera:

Demostración

Sean las rectas y . Por hipótesis, la suma de los ángulos y es menor a dos rectos.

Construimos la recta paralela a (por P31).

Entonces, (por P29).

Asumiendo que y pueden prolongarse hasta el infinito[100], construimos una paralela a en el punto (por P31), de tal forma que sea mayor que . Sea . ¿No está presuponiendo aquí el mismo postulado que propone Proclo? O sea, que puede ser tan grande como queramos.

Tomemos, en la prolongación de , igual a . Unamos los dos puntos con una recta .

Como que y son paralelas por construcción, entonces y son iguales (por P27). También serán iguales y .(por P4)

Entonces es paralela a (por P28). Y también es paralela a (por P30).

Como que está en el interior del triángulo y es paralela a uno de sus lados , entonces necesariamente deberá intersectar a , porque no puede escaparse de la paralela , ni llegar a (por NC14). C.Q.D.

El uso de las NC 11 y 12 es indirecto, ya que las ha utilizado en la demostración de la P27[101] y usa esta proposición en la demostración de las proposiciones siguientes que son necesarias, todas y cada una de ellas, para esta demostración.

5. La idea de Saccheri

Al contrario que sus predecesores, el libro de Saccheri no es una edición de los Elementos. Está referido a ellos, naturalmente, pero ni glosa, ni comenta las proposiciones del primer libro de Euclides, sino que establece nuevas proposiciones, negando el 5º postulado con el fin de llegar a una contradicción. Y, con ello, demostrarlo. Los únicos matemáticos, aparte de Euclides, a los que hace referencia son Clavius[102], Proclo[103], Borelli[104], Nasir al-Din al-Tusí[105], John Wallis[106] y Tales[107]. No se trata, por tanto, de un libro que pretenda polemizar

100 "Assumo tanquam axioma per se noto, inter rectas AD, AX in infinitum productas duci posse aliquam ad AM parallelam, puta ZX, æqualis AR" [Tacquet 1683, pp. 35]. De hecho no es necesario prolongarlas hasta el infinito, sino que basta con escoger una prolongación finita suficente que permita construir .

101 Ver pàgina XII del Anexo. Evita el uso de P16 y P17 como hace Euclides.

102 En el Proemio al Lector, en los Escolio I y II de la P21 y en el Escolio del Lemma IV de la P33 [Saccheri 1733, pp. 5, 83, 91 y 201 respectivamente].

103 En el Escolio I de la P21 [Saccheri 1733, pp. 83].

104 En el Escolio II de la P21 [Saccheri 1733, pp. 87].

105 En el Escolio III de la P21 y en el Corolario I de la P25 [Saccheri 1733, pp. 101 y 137 respectivamente].

Cuaderno de Materiales, Nº23, 2011, 575-600, ISSN: 1139-4382

con las demostraciones anteriores, sino que su pretension es establecer la demostración definitiva.

En el prefacio, dice que Euclides no utiliza el postulado hasta la proposición 29, por lo que se debe estimar que las proposiciones anteriores son independientes del mismo. Por ello, en su demostración utilizará todas las definiciones, postulados y nociones comunes de Euclides (excepto el 5º postulado) más todos los teoremas de las proposiciones 1 a 26 excepto las proposiciones 16 y 17[108]. ¿Cual es el motivo de esta restricción? Ya hemos visto que Proclo, en su demostración, no tiene ningún reparo en establecer un postulado que de alguna forma apela al infinito: la distancia entre los lados de un ángulo agudo puede llegar a ser más grande que cualquier magnitud dada. Sin embargo Clavius y Tacquet, con sus postulados, pretenden devolver el pro-blema al ámbito de lo local, de lo determinado, de lo finito. Saccheri intuye que ello no es posible; no en vano han pasado casi cien años de progreso en matemática infinitesimal. Entonces, no puede aceptar proposiciones que, de alguna manera, dependen de la noción de infinito.

El libro está dividido en dos partes: en la primera (proposiciones 1 a 33) nos dice que demostrará el 5º postulado sin acudir a ninguna petición de principio como han hecho sus antecesores y, en la segunda (proposiciones 34 a 39), demostrará que la línea cuyos puntos son todos equidistantes de una recta dada, sólo puede ser una recta.

No detallamos el procedimiento de Saccheri por suficientemente conocido (construcción del cuadrilátero y discusión de la naturaleza de los ángulos en los vértices). Tan sólo nos limitamos a destacar que, a partir de la proposición 23[109], Saccheri estará analizando la posibilidad de existencia de rectas asintóticas (aunque nunca las llamará por ese nombre). Desde dicha proposición hasta el final de la primera parte, es donde reside la parte más interesante del libro, ya que, sin saberlo, demuestra algunos teoremas de la geometría no euclídea. Como anexo, también reproducimos abreviadamente la proposición 33, con la que Saccheri se da por satisfecho y cree haber demostrado el 5º postulado.

6. Conclusión

Como ya hemos dicho, los siglos XVI y XVII no son una etapa creativa en el campo de la geometría, sobre todo si lo comparamos con los avances que se registrarán en álgebra y en

106 En el Escolio III de la P21 [Saccheri 1733, pp. 101].
107 En el Escolio del Lemma IV de la P33 [Saccheri 1733, pp. 201].
108 "Excepto cuando se refieran a triángulos de alguna forma restringidos" [Saccheri 1733, pp. 9].
109 [Saccheri 1733, pp. 117].

análisis. Sin embargo, lo que si existirá durante este periodo serán dos aspectos que serán fundamentales en los desarrollos posteriores: la recuparación de los textos clásicos griegos (al menos, de los que habían sobrevivido) y la difusión de los mismos. Ello significará la aparición de un pensamiento espacial concreto, útil para las otras ciencias y para la tecnología.

Hemos visto que el papel de los jesuítas en este segundo aspecto fue trascendental. Por ello no es de extrañar la abundante producción geométrica procedente de sus filas, que, aunque tenga escasa originalidad, tendrá unos efectos didácticos y propedéuticos de gran alcance.

También sabemos que dentro de toda esta producción, jesuítica o no, siempre existió una preocupación por el tema de las paralelas: en definitiva la única invocación al infinito que hay en Euclides es, precisamente, la definición de paralela. Preocupación que continuará, más acentuada, durante el siglo XVIII, pero de la que sólo se obtendrán analogías, balbuceos, ideas inconexas. No obstante, todas ellas tendrán su importancia en el desarrollo posterior.

Toda esta preocupación, no cristalizará en nuevos desarrollos hasta el siglo XIX con Boliay, Lobachevski, Taurinus, Gauss y, sobre todo, Riemann. Pero esto es ya otra historia.

Bibliografía:

Textos primarios

1. [Clavius 1612]

   Clavius, Cristophorus. Opera Mathematica V tomis distributa. Sumptibus Antonii Hierat, excudebat Reinhardus Eltz & Ioannes Volmari, Maguncia, 1611-1612. Edición facsímil de Olms-Weidmann. Hildesheim-Zurich-New York, 1999. También digitalizado por la Universidad de Notre Dame: http://mathematics.library.nd.edu/clavius/.
2. [Euclides - Vitrac]

   Euclides. Les Éléments. Edición de Bernard Vitrac sobre el texto establecido por Heiberg. PUF. Paris, 1990 (1er vol.), 1994 (2o vol.), 1998 (3er vol.) y 2001 (4o vol.).
3. [Fine 1551]

   Finé, Oronce. In sex priores libros Geometricorum elementorum Euclidis Megarensis demonstrationes, recens auctae, & emendatae; una cum ipsius Euclidis texto graeco, & interpretatione latina Bartholomei Zamberti Veneti. Omnia at sidem geometricam, per eundem Orontium recognita. Apud Reginaldum Calderium (Regnault Chaudière). Paris, 1551 (Tercera edición). Digitalizado por la Universidad de Tours: http://www.bvh.univ-tours.fr/Consult/index.asp?numfiche=153
4. [Heilbronner 1742]

   Heilbronner, Johann Christoph. Historia Matheseos Universae. Impensis J. F. Gleditschii. Leipzig, 1742.
5. [Kluegel 1763]

Kluegel, Georg Simon. Conatuum Praecipuorum Theoriam Parallelarum Demonstrandi recensio. Goetingen. Officina Schultziana, 1763. También digitalizado en http://www.uni-koeln.de/ew-fak/Mathe/volkert/Mathematikgeschichte/quellen/kluegeb.htm.

6. [Lambert 1786]

Lambert, Johann Heinrich. Theorie der Parallellinien. Leipziger Magazin für die reine und angewandte Mathematik. Leipzig. (1786) pp. 142-164 y 325-358. Reeditado enEngel-Stackel

7. [Montucla 1798]

Montucla, Jean Étienne. Histoire des Mathématiques. Chez Henry Agasse. Paris, 1798.

8. [Proclo]

Proclo. Commento al I Libro degli Elementi di Euclide. Introducción, traducción y notas de Maria Timpanaro Cardini. Giardini Editore. Pisa, 1978.

9. [Saccheri 1733]

Saccheri, Girolamo. Euclides ab omni naevo vindicatus. Chelsea Publishing Co. New York, 1986. Editado y traducido por G.B. Halsted.

10. [Tacquet 1683]

Tacquet, Andrea. Elementa Geometriae Planae ac solidae quibus accedunt selecta ex Archimede theoremata. Apud Henricum Wetstenzu. Amsterdam, 1683.

Libros y artículos

1. [Baldini 1992]

Baldini, Ugo. Legem Impone Subactis. Studi su Filosofia e Scienza dei Geuiti in Italia 1540-1632. Bulzoni Editore. Roma, 1992.

2. [Baldini 1993]

Baldini, Ugo (ed.). Christoph Clavius e l'attività scientifica dei gesuiti nell'età di Galileo. Atti del Convegno Internazionale (Chieti, 28-30 aprile 1993). Bulzoni Editore. Roma, 1995.

3. [Barbera 1942]

Barbera, Mario S.I. La Ratio Studiorum e la Parte Quarta delle Costituzioni della Compagnia di Gesú. CEDAM. Padua, 1942.

4. [Barrow-Green 2006]

Barrow-Green, June. 'Much necessary for all sortes of men': 450 years of Euclid's Elements in English. BSHM Bulletin. Vol. 21 (2006). pp 2-25.

5. [Basso 1999]

Basso, Paola. Filosofia e geometria. Lambert interpreti di Euclide. La nuova Italia. Florencia, 1999.

6. [Biagioli 1989]

Biagioli, Mario. The social status of italian mathematicians. 1450-1600. History of Science. Vol. 27 Num. 1 (1989). pp 41-95

7. [Blum 2006]

Blum, Paul Richard. Benedictus Pererius: Renaissance Culture at the origins of Jesuit Science. Science & Education. Vol. 15 (2006). pp 279-304.

8. [Bonola 1955]

Bonola, Roberto. Non-Euclidean geometry: a critical and historical study of its development. Dover. New York, 1955.

9. [Bosmans 1925]

Bosmans, H. Le jésuite Mathèmaticien anversois André Tacquet (1612-1660). Le compas d'or. Bulletin trimestriel de la Société des Bibliophiles anversois. 3eme année Num. 2 (1925). pp 63-87

10. [Bosmans 1927]

Bosmans, H. Andre Tacquet (S.J.) et son traité d'Aritmethique theorique et pratique. Isis. Vol. 9 Num. 1 (1927). pp 66-82

11. [Brizzi-Greci 2001]

Brizzi, Gian Paolo y Greci, Roberto (eds.). Gesuiti e Università ín Europa (secoli XVI-XVIII). Atti del Convegno di Studi. Parma dicembre 2001. CLUEB. Bolonia, 2002.

12. [Cajori 1910]

Cajori, Florian. Attempts made during the Eighteenth and Niniteenth Centuries to reform the teaching of Geometry. The American Mathematical Monthly. Vol. 17 Num. 10 (1910). pp 181-201.

13. [Carugo-Crombie 1983]

Carugo, Adriano; Crombie, Alistair. The Jesuits and Galileo's Ideas of Science and of Nature. Annali dell'Istituto e Museo di Storia della Scienza di Firenze. Vol. VIII. pp. 3-68.

14. [Cosentino 1971]

Cosentino, Giuseppe. L'insegnamento delle Matematiche nei Collegi Gesuitici nell'Italia Settentrionale. Physis. Vol. 13 (1971). pp. 205-217.

15. [Davis 1995]

Davis, Phillip J. The rise, fall and possible transfiguration of Triangle Geometry: A mini history. The American mathematical monthly. Vol. 102 Num. 3 (1995). pp 204-214

16. [Dear 1987]

Dear, Peter. Jesuit mathematical science and the reconstitution of experience in the early Seventeenth Century. Studies in History and Philosophy of Science. Vol. 18 Num. 2 (1987). pp 133-175

17. [Dear 1995]

Dear, Peter. Discipline & Experience: The Mathematical Way in the Scientific Revolution. The University of Chicago Press. Chicago, 1995.

18. [De Pace 1993]

De Pace, Anna. Le matematiche e il mondo. FrancoAngeli. Milan, 1993.

19. [Dhombres 1993]

Dhombres, Jean. Is one proof enough? Travels with a mathematician of the baroque period. Educational Studies in Mathematics. Vol. 24 (1993). pp. 401-419

20. [Donnelly 1982]

Donnelly, John Patrick SI. The Jesuit College at Padua. Grouth, suppression, attempts of restoration: 1552-1606. Archivum historicum Societatis Iesu. Vol.51 (1982). pp 45-79.

21. [Dou 1992]

Dou, Albert. The "Corollarium II" to the proposition XXIII of Saccheri's Euclides. Publicacions Mathemàtiques. Vol. 36 (1992). pp. 533-540.

22. [Engel-Stackel]

Engel, Friedrich; Stäckel, Paul. Die Theorie der Parallellinien von Euklid bis auf Gauss. Teubner. Leipzig, 1895.

23. [Favino 2006]

Favino, Federica. Mathematics and Mathematicians at Sapienza University in Rome (XVII-XVIII Century). Science & Education. Vol. 15 No. 2-4 (2006). pp 357-392.

24. [Feingold 2003]

Feingold, Mordechai (ed.). Jesuit Science anf the Republic of Letters. MIT Press. Cambridge, 2003.

25. [García Villoslada 1954]

García Villoslada, Ricardo S.I. Storia del Collegio Romano dal suo inizio (1551) alla soppresione della Compagnia di Gesú (1773). Universidad Pontificia Gregoriana. Roma, 1954.

26. [Gatto 2006]

Gatto, Romano. Cristoph Clavius'"Ordo servandus in addiscendis disciplinis mathematics" and the teaching of mathematics in Jesuit Colleges at the beginning of the modern era. Science & Education. Vol. 15 (2006). pp.235-258.

27. [Giacobbe 1972-1]

Giacobbe, Giulio Cesare. Il "Commentarium de Certitudine Mathematicarum Disciplinarum" di Alessandro Piccolomini. Physis. Vol. 14 No. 2 (1972). pp. 162-193.

28. [Giacobbe 1972-2]

Giacobbe, Giulio Cesare. Francesco Barozzi e la "Quæstio de Certitudine Mathematicarum". Physis. Vol. 14 No 4 (1972). pp 357-374.

29. [Giacobbe 1973]

Giacobbe, Giulio Cesare. La riflessione metamatematica di Pietro Catena. Physis. Vol 15 No 2 (1975). pp 178-196.

30. [Giacobbe 1976]

Giacobbe, Giulio Cesare. Epigoni nel Seicento della "Quæstio de Certitudine Mathematicarum": Giuseppe Biancani. Physis. Vol18 No 1 (1976). pp. 5-40.

31. [Giacobbe 1977]

Giacobbe, Giulio Cesare. Un Gesuita Progressista nella "Quæstio de Certitudine Mathematicarum" rinascimentale: Benito Pereyra. Physis. Vol. 19 No. 1 (1977). pp. 51-86.

32. [Giard 1993]

Giard, Luce. Le Colllége Romain: la diffusion de la science (1570-1620) dans le réseau jésuite. XIXth International Congress of History of Science. Universidad de Zaragoza. Zaragoza, 1993. pp. 243-249.

33. [Homann 1983]

Homann, Frederick A. SI. Christopher Clavius and the Renaissance of Euclidean Geometry. Archivum historicum Societatis Iesu. Vol. 52 (1983). pp 233-246.

34. [Julia 1996]

Julia, Dominique. Généalogie de la "Ratio Studiorum". En Giard, Luce y de Vaucelles, Louis (eds.). Les Jésuites à l'âge baroque 1540-1640. Editions Jérôme Millon. Grenoble, 1996.

35. [Karpinski 1928]

Karpinski, L.C., Kokomoor, F.W. The teaching of elementary Geometry in the Seventeenth Century. Isis. Vol. 10 Num. 1 (1928). pp 21-32.

36. [Kessler 1995]

Kessler, Eckhard. Clavius entre Proclus et Descartes. en Giard, Luce, ed. Les jésuites à la Renaissance. PUF. Paris, 1995. pp 285-308.

37. [Knobloch 1998]

Knobloch, Eberhard. Sur la vie et l'oeuvre de Cristophore Clavius (1538-1612). Revue d'Histoire des Sciences. Vol. 41 No. 3-4. pp. 331-356.

38. [Kokomoor 1928]

Kokomoor, F.W. The distinctive features of Seventeenth Century Geometry. Isis. Vol. 10 Num. 2 (1928). pp 367-415

39. [Loget 2002]

Loget, François. Wallis entre Hobbes et Newton. La question de l'angle de contact chez les anglais. Revue d'Histoire des Sciences. Vol. 8 (2002). pp 207-262

40. [Looy 1980]

Looy, Herman van. Chronologie et analyse des manuscripts mathématiques de Grégoire de Saint-Vincent (1584-1667). Archivum historicum Societatis Iesu. Vol. 49 (1980). pp 279-303

41. [MacDonnell 1976]

MacDonnell, Joseph SI. Jesuit mathematicians before the suppresion. Archivum historicum Societatis Iesu. Vol. 45 (1976). pp 139-148

42. [MacDonnell 1989]

MacDonnell, Joseph SI. Jesuit Geometers. The Institute of Jesuit Sources. St. Louis, Missouri, 1989.

43. [Maierù 1978]

Maierù, Luigi. Il quinto postulato euclideo in Cristoforo Clavio. Physis. Vol. 20 (1978). pp. 191-212.

44. [Maierù 1982]

Maierù, Luigi. Il quinto postulato euclideo da C. Clavio (1589) a G. Saccheri (1733). Archive for History of Exact Sciences. Vol. 27 Num. 4 (1982). pp 297-334

45. [Maierù 1990]

Maierù, Luigi. "... in Christophorum Clavium de contactu linearum apologia" Considerazioni attorno alla polemica fra Peletier e Clavio circa l'angolo di contatto (1579-1589). Archive for History of Exact Sciences. Vol. 41 Num. 2 (1990). pp 115-137

46. [Mancosu 1992]

Mancosu, Paolo. Aristotelian logic and Eucliden mathematics: Seventeenth Century developments of the Quæstio de certitudine mathematicarum. Studies in History and Philosophy of Science. Vol 23 Num. 2 (1992). pp 241-265.

47. [Mancosu 1996]

Mancosu, Paolo. Philosophy of Mathematics and Mathematical Practice in the seventeenth century. Oxford University Press. New York, 1996.

48. [Meskens 1994]

Meskens, Ad. Gregory of Saint Vincent: a pioneer of the calculus. The Mathematical Gazette. Vol. 78 No 483. pp. 315-319.

49. [Romano 1999]

Romano, Antonella. La Contre-réforme mathématique: Constitution et diffusion d'une culture mathématique jésuite à la Renaissance (1540-1640). Ecole française de Rome. Roma, 1999.

50. [Romano 2004]

Romano, Antonella. Réflexions sur la construction d'un champ disciplinaire: les mathématiques dans l'institution jésuite à la Renaissance. Paedagogica Historica. Vol. 40 No 3 (2004)pp. 245-259.

51. [Rozenfeld 1988]

Rozenfeld, Boris Abramovich. A history of non-Euclidean Geometry. Springer Verlag. New York, 1988.

52. [Sarton 1949]

Sarton, George. An Appeal for the Republication in Book Form of Father Bosmans'Studies on Belgian Mathematics in the Sixteenth and Seventeenth Centuries. Isis, Vol. 40 No. 1 (Feb 1949), pp. 3-6.

53. [Scaduto 1948]

Scaduto, Mario SI. Le origini dell'Università di Messina (A proposito del quarto centenario). Archivum historicum Societatis Iesu. Vol. 17 (1948). pp 102-159

54. [Scaduto 1949]

Scaduto, Mario SI. Il matematico Francesco Maurolico e i Gesuiti. Archivum Historicum Societatis Iesu. Vol 18 (1949). pp. 126-141.

55. [Smolarski 2002]

Smolarski, Dennis C. The Jesuit Ratio Studiorum, Christopher Clavius, and the Study of Mathematical Sciences in Universities. Science in context. Vol. 15 No. 3 (2002), pp 447-470.

56. [Smolarski 2002-1]

Smolarski, Dennis C. Teaching Mathematics in the Seventeenth and Twenty-First Centuries. Mathematics Magazine. Vol. 75 Num. 4 (2002). pp 256-262.

57. [Udias 2000]

Udías Vallina, Agustín. Contribución de los jesuitas a la ciencia en los siglos XVI al XVIII. Arbor. Vol. 167 No 657 (2000). pp. 207-228.

58. [Wallace 1984]

Wallace, William A. Galileo and his sources: The Heritage of the Collegio Romano in Galileo's Science. Princeton University Press. New Jersey, 1984.

59. [Wallace 1991]

Wallace, William A. Galileo, the Jesuits and the medieval Aristotle. Ashgate Variorum. Aldershot, 1999.

60. [Wilks 1990]

Wilks, Yorick. Christopher Clavius and the classification of sciences. Synthese. Vol. 83 No 3 (1990). pp 293-300.